



TITLE:

# 水深が有限な磁性流体界面の波動と安定性 (非線形波動研究の数理, モデリングおよび応用)

AUTHOR(S):

水田, 洋

---

CITATION:

水田, 洋. 水深が有限な磁性流体界面の波動と安定性 (非線形波動研究の数理, モデリングおよび応用). 数理解析研究所講究録 2013, 1847: 96-106

ISSUE DATE:

2013-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/195066>

RIGHT:

## 水深が有限な磁性流体界面の波動と安定性

北海道大学大学院・工学研究院 水 田 洋

Yo Mizuta

Faculty of Engineering, Hokkaido University

### 1 はじめに

磁性流体界面における波動や安定性を考えるとき、複雑に変化する界面形状のもとで流体と磁場が相互作用する結果、これらの現象が現れることを考慮する必要がある。本研究ではこれまで、界面変形の大きさや複雑さによる制限を受けず、汎用的に流体解析・磁場解析を行う方法を構築してきた。

流体解析には、Bernoulli 方程式と界面条件から導いた**界面力学方程式**を用いる [1]。このためには、重力・界面張力・磁気応力差などによる界面応力とを求める必要がある。いったん界面応力とが求まれば、その界面振幅に関する勾配行列の固有値 (**非線形応答**) の符号から、界面の安定性を判定することができる [2, 3]。

磁気応力差を求めるには、磁場解析を行い、そのときの界面形状に応じた界面磁場を求めなければならない。このために、**3次元界面磁場方程式**を導き、調和性・界面条件を満たす界面磁場を厳密かつ効率的に求められるようにした [4, 5, 6, 7]。界面があって生じる誘導場は、界面がないときに与えた任意の印加磁場分布に **3次元 Hilbert 変換演算子**を作用させて求める。以上の**汎用磁場解析**は、界面形状に沿う一般化座標系に基づくが、古くには、デカルト座標におけるラプラス方程式の解の形に磁気ポテンシャルを形成する弱非線形解析がある [8]。汎用解析の位置づけを確認することを目的として、弱非線形解析との関係を調べた [9]。この際に、界面共通量 (界面上の磁気ポテンシャル・法線磁束密度) を逐次近似的に求めるのではなく、行列解法により、中間量を経ずまたべき展開を行わない界面共通量の表式を導いた。

ところで、これまでは磁性流体の深さが充分にあるとして、理論解析・数値解析を行ってきたが、実際は、有限深さに磁性流体を入れた容器を磁極間

の限られた空間に挿入する．このように，流体領域・真空領域の厚さが有限な場合の磁性流体界面の波動や安定性を調べられるようにするため，本稿では，これまでの流体解析と磁場解析に施した拡張について述べる．

## 2 半無限流体領域における界面力学方程式 [1]

流体の運動方程式は， $D, G, \rho, \hat{p}$  を動圧・重力ポテンシャル・流体密度・圧力として，

$$0 = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla(D + G + \hat{p}) = \nabla \left( \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + D + G + \hat{p} \right) \quad (1)$$

と表される．渦なし流体では， $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$  となる速度場を  $\mathbf{v} = \nabla \varphi$  で与える速度ポテンシャル  $\varphi(x, y, z)$  が存在し，Bernoulli 方程式が導かれる．界面上 ( $z = \zeta$ ) では， $C, T, p_0$  を表面張力・磁気応力差・大気圧として，力学的条件  $\hat{p}_{z=\zeta} = (C + T + p_0)_{z=\zeta}$  が成り立つ．これを (1) に用いれば，

$$\begin{aligned} 0 &= \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} \Big|_{z=\zeta} + \nabla_2 (D + G + \hat{p})_{z=\zeta} = \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} \Big|_{z=\zeta} + \nabla_2 (D + G + C + T + p_0)_{z=\zeta} \\ &= \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} \Big|_{z=\zeta} + \nabla_2 S_{z=\zeta}, \quad (S \equiv D + G + C + T + p_0). \end{aligned} \quad (2)$$

ただし， $v_2$  は流速の界面成分， $\nabla_2$  は界面方向偏微分を表す．界面に沿って (2) を積分すれば， $f(t)$  を空間座標によらない関数として，次式が導かれる．

$$\rho \partial \varphi / \partial t + S = f(t), \quad (z = \zeta). \quad (3)$$

磁気応力差は， $h_{X,Y}, b_Z, \mu_j, [\dots]$  を接線磁場・法線磁束密度・流体／真空の透磁率 ( $j = + / -$ )・界面を横切る値の跳び (流体－真空) として，次のようになる．

$$T \equiv - [1/\mu_j] \{ \mu_+ \mu_- (h_X^2 + h_Y^2) + b_Z^2 \} / 2. \quad (4)$$

界面変位  $\zeta(\mathbf{R})$  と界面応力和  $S(\mathbf{R})$  を界面に沿う一般化座標  $\mathbf{R} = (X, Y)$  の関数として，波数ベクトル  $\mathbf{k}_\mu$  に属する周期関数を成分とする横ベクトル  $\Phi^{(zS)}(\mathbf{R})$  により，次のように展開する．

$$\zeta(\mathbf{R}) = \Phi^{(zS)}(\mathbf{R}) \tilde{\zeta}, \quad S(\mathbf{R}) = \Phi^{(zS)}(\mathbf{R}) \tilde{S}. \quad (5)$$

ここで， $\tilde{\zeta} \equiv (\tilde{\zeta}_\mu)$ ， $\tilde{S} \equiv (\tilde{S}_\mu)$  ( $1 \leq \mu \leq N$ ) は展開係数縦ベクトルである．大きさが  $k$  の波数ベクトルに属する速度ポテンシャルが  $\varphi = \int_{-\infty}^{\zeta} dz (\partial \zeta / \partial t) e^{kz}$  とな

ることを用いると、波数空間で(3)は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial t^2} = -\frac{k}{\rho} \tilde{S}(\tilde{\zeta}), \quad \tilde{S}(\tilde{\zeta}) = \tilde{G}(\tilde{\zeta}) + \tilde{C}(\tilde{\zeta}) + \tilde{T}(\tilde{h}_x(\tilde{\zeta}), \tilde{h}_y(\tilde{\zeta}), \tilde{h}_z(\tilde{\zeta})). \quad (6)$$

ここでは、(3)または(6)を界面力学方程式とよぶ。

$\tilde{S}(\tilde{\zeta})$  が定まれば、これから勾配行列を求めることができる [10].

$$H \equiv \left( \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{\zeta}_\mu} \right)_{1 \dots \mu \dots N}. \quad (7)$$

定常界面形状を Newton 法で求めるとき、勾配行列  $H$  の逆行列が用いられる。また、界面変位の振幅が有限でも、 $H$  の固有値の符号から界面の安定性を判定し、臨界磁場強度を決めることができる。

### 3 有限厚さ流体領域における界面力学方程式

本節では、流体領域の厚さ  $d$  を有限とする場合の界面力学方程式について述べる。渦なし流体では、 $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$  となる速度場を  $\mathbf{v} = \nabla \varphi$  で与える速度ポテンシャル  $\varphi(x, y, z)$  が存在する。さらに流体が非圧縮なら、 $\varphi$  は Laplace 方程式  $\nabla^2 \varphi = 0$  を満たす。界面が水平に近い場合、 $\varphi(x, y, z) = H(x, y)Z(z)$  と置けば、

$$\nabla_2^2 H + k^2 H = 0, \quad d^2 Z/dz^2 - k^2 Z = 0 \quad (8)$$

より、一般解は  $\varphi(x, y, z) = H(x, y)(Ee^{kz} + Fe^{-kz})$  となる。ただし、 $\nabla_2 = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ 、 $k$  は波数ベクトルの大きさになる。ここで、境界条件  $v_z|_{z=-d} = 0$ 、 $v_z|_{z=\zeta} = \partial \zeta / \partial t$  により任意定数  $E, F$  および  $H(x, y)$  を定めると、

$$\varphi = \frac{\cosh k(z+d)}{k \sinh kd} \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\sinh k(z+d)}{\sinh kd} \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (9)$$

次に、界面上で非圧縮性条件の時間変化を考える。

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \Big|_{z=\zeta} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v_z}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} + \nabla_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} \Big|_{z=\zeta}. \quad (10)$$

ただし、 $\mathbf{v}_2 = (v_x, v_y)$  である。ここで、(9) および (2) を用いると、次のように界面力学方程式が導かれる。

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{k}{\tanh kd} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) + \nabla_2 \cdot \left( -\frac{1}{\rho} \nabla_2 S \right). \quad (11)$$

前節の (5) と同じく、界面変位  $\zeta$  と界面応力和  $S$  を周期関数列で展開する。このとき  $\nabla_2^2 S + k^2 S = 0$  を用いれば、(6) に相当して、(11) から  $\tilde{\zeta}$  に対

する界面力学方程式が導かれる.

$$\frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial t^2} = -\frac{k \tanh(kd)}{\rho} \tilde{S}(\tilde{\zeta}). \quad (12)$$

(6)に較べて, 右辺に新たに  $\tanh(kd)$  がかかる. この因子は 1 より小さいので, 界面の動きは,  $S$  が同じでも流体領域が半無限の場合より抑制される.

#### 4 線形波動の分散関係と安定性解析 [1, 2]

半無限の流体領域の界面に鉛直一様磁場を印加する場合, 微小な界面変位  $\zeta^1 \propto \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$  に関して (6) を線形化すれば, 線形波動の分散関係が導かれる.

$$\omega^2 = gk + (\gamma/\rho)k^3 - (M_n^2/2\rho P)k^2 \equiv h(k). \quad (13)$$

第2辺第1,2項は重力項・表面張力項で,  $g, \gamma, \rho$  は重力加速度・表面張力係数・流体密度である. 第3項は磁気力項であり, 法線磁束密度の基本場を  $b_Z^0$  とすれば, 法線磁化は  $M_n = 2Mb_Z^0$  となる. ただし, 流体/真空の透磁率  $\mu_j$  ( $j = +/-$ ) で透磁率パラメータ  $P \equiv (1/\mu_- + 1/\mu_+)/2$ ,  $M \equiv (1/\mu_- - 1/\mu_+)/2$  を定義した.

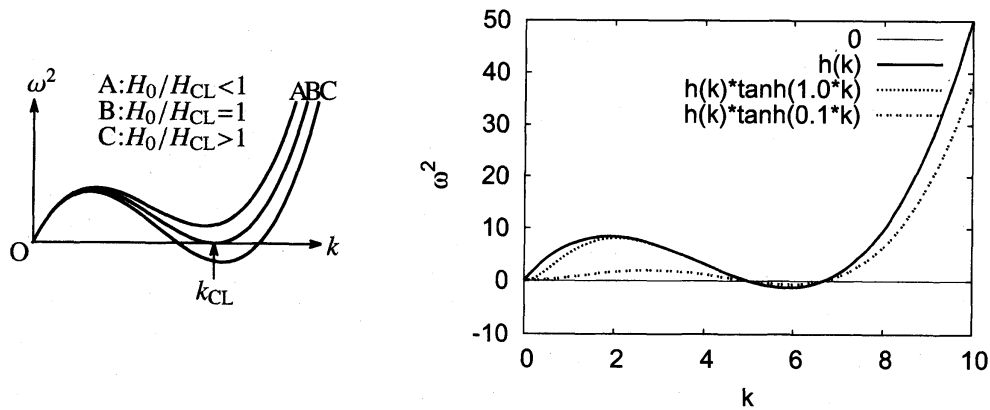


Fig. 1: 線形波動分散関係の印加磁場強度依存性 (左) と流体領域厚さ依存性 (右).

正の重力項・表面張力項に対して磁気力項は負であるため, Fig. 1(左)に示すように, 印加磁場強度  $H_0$  の増加と共に  $\omega^2$  は減少し,  $H_0$  が臨界磁場強度  $H_{CL}$  を越えると臨界波数  $k_{CL} = (\rho g / \gamma)^{1/2}$  付近の  $\omega^2$  に負の領域が現れて, 界面は不安定になる [2, 11].

流体領域の厚さが有限な場合、界面力学方程式(12)の右辺に新たに  $\tanh(kd)$  が加かることから、線形波動の分散関係は、

$$\omega^2 = h(k) \tanh(kd) \quad (14)$$

となる。その振る舞いに対する流体領域の厚さ  $d$  の影響を Fig. 1(右)に示す。臨界波数はあまり変わらないが、 $d$  を小さくすれば周波数・成長率も下がる。半無限領域の場合からのずれは、低波数ほど大きく現れる。全体として、ずれが大きく現れる目安は  $k_{CL}d < 1$  となる。

線形波動の分散関係は、界面変位が微小であるとして導くが、界面変位  $\zeta^0(\mathbf{R})$  が必ずしも微小でなく、しかし安定なら、界面を  $\zeta^0(\mathbf{R})$  から  $\zeta(\mathbf{R}) = \zeta^0(\mathbf{R}) + \zeta^1(\mathbf{R})$  までわずかに動かしても、ずれ  $\zeta^1(\mathbf{R})$  は長時間後に0に近づく。界面変位を  $\zeta(\mathbf{R}) = \Phi^{(\zeta S)}(\mathbf{R})\tilde{\zeta}$ ,  $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}^0 + \tilde{\zeta}^1$  と周期関数列で展開して、 $\zeta(\mathbf{R})$ ,  $\zeta^0(\mathbf{R})$  に対する界面力学方程式(6)に用い、近似  $\tilde{S}(\tilde{\zeta}^0 + \tilde{\zeta}^1) \simeq \tilde{S}(\tilde{\zeta}^0) + H(\tilde{\zeta}^0)\tilde{\zeta}^1$  を行うと、

$$\frac{\partial^2 \tilde{\zeta}^0}{\partial t^2} = -\frac{k}{\rho} \tilde{S}(\tilde{\zeta}^0), \quad \frac{\partial^2 (\tilde{\zeta}^0 + \tilde{\zeta}^1)}{\partial t^2} = -\frac{k}{\rho} \tilde{S}(\tilde{\zeta}^0 + \tilde{\zeta}^1) \simeq -\frac{k}{\rho} \tilde{S}(\tilde{\zeta}^0) - \frac{k}{\rho} H(\tilde{\zeta}^0) \tilde{\zeta}^1 \quad (15)$$

より、

$$\frac{\partial^2 \tilde{\zeta}^1}{\partial t^2} \simeq -\frac{k}{\rho} H(\tilde{\zeta}^0) \tilde{\zeta}^1 \quad (16)$$

が導かれる。 $(k/\rho)H(\tilde{\zeta}^0)$  の最小固有値を  $h$  と置けば、 $h$  は微小界面変位での  $\omega^2$  を有限界面変位・多モードへ拡張したものになっている。以下では、 $h$  を非線形応答とよぶ。流体領域の厚さが有限の場合は、界面力学方程式(12)を用いて、同様の安定性解析を行うことになる。

## 5 無限厚さ領域における汎用界面磁場解析 [4, 5]

本節には、任意の界面形状や印加磁場分布のもとで、調和性と界面条件を厳密に満たす界面磁場を求める、これまでの方法をまとめる。

界面磁場  $h_{X,Y}, b_Z$  は、既知の外部印加磁場  $\mathbf{h}^0$  より直接定義できる基本場  $h_{X,Y}^0 = \mathbf{t}_{X,Y} \cdot \mathbf{h}^0$ ,  $b_Z^0 = \mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{h}^0 / P$  と、基本場と合わせて調和性と界面条件を満たす誘導場  $h_{X,Y}^1, b_Z^1$  に分ける。ここで、 $\mathbf{t}_{X,Y}, \mathbf{t}_Z$  は接線および法線単位ベクトル、

また,  $P \equiv (1/\mu_- + 1/\mu_+)/2$ ,  $M \equiv (1/\mu_- - 1/\mu_+)/2$  である.

誘導場は, **3次元界面磁場方程式** ((17) 左), または, これを書き換えた直接的な表式 (同右) から求める [4, 6, 7, 9].

$$\begin{cases} (P+M\hat{G}_Z)b_Z^1 = -M\hat{G}_Z b_Z^0, \\ h_{X,Y}^1 + M\hat{G}_{X,Y}b_Z^1 = -M\hat{G}_{X,Y}b_Z^0, \end{cases} \quad \begin{cases} b_Z^1 = \hat{H}_Z (1 - \hat{H}_Z)^{-1} b_Z^0, \\ h_{X,Y}^1 = \hat{H}_{X,Y} (1 - \hat{H}_Z)^{-1} b_Z^0. \end{cases} \quad (17)$$

ここでは,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'$  を観測点とソース点の位置ベクトル,  $\nabla$  を  $\mathbf{r}'$  に関する微分 または  $\mathbf{r}'$  だけの関数,  $\psi(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) = -1/4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$  を 3次元 Poisson 方程式  $\Delta'\psi = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$  の基本解,  $\iint_F dS'$  を界面  $F$  上のソース点  $\mathbf{r}'$  にわたる面積分として, 次のように **3次元 Hilbert 変換演算子** を定義した.

$$\hat{G}_I F(X, Y) \equiv t_I \cdot \hat{G} F(X', Y') \quad (I = X, Y, Z), \quad \hat{G} F(X, Y) \equiv 2 \iint_F dS' (\nabla' \psi) F(X', Y'), \quad (18)$$

$$\hat{H}_{X,Y} F(X, Y) \equiv -M \hat{G}_{X,Y} F(X, Y), \quad \hat{H}_Z F(X, Y) \equiv -(M/P) \hat{G}_Z F(X, Y). \quad (19)$$

以下には, 3次元界面磁場方程式 (17) について, 導出の概要を述べる.

Green の定理

$$\iiint_V (\phi' \Delta' \psi - \psi \Delta' \phi') dV' = \oint_S dS' \cdot \{\phi' (\nabla' \psi) - \psi (\nabla' \phi')\} \quad (20)$$

において, 3次元 Poisson 方程式の基本解を  $\psi$ ,  $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$  を満たす調和場 (= 磁束密度ベクトル)  $\mathbf{f} = \nabla \phi$  を求めるためのポテンシャルを  $\phi$  とすれば,  $\Delta' \psi = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ ,  $\Delta' \phi' = 0$  より

$$\phi = 2 \oint_S dS' \cdot \{\phi' (\nabla' \psi) - \psi (\nabla' \phi')\} \quad (21)$$

となる. ただし  $S$  は, 界面  $F$  と無限遠から成る, 流体領域・真空領域を囲む表面である. また, 右辺の積分の前の 2 は, 観測点  $\mathbf{r}$  が  $F$  上にあるとき,  $\iiint_V \Delta' \psi$  の値が 1 でなく 1/2 となることを考慮した.

無限遠で  $\phi'$ ,  $\psi$  が消滅する境界条件を課して (21) の両辺に  $\nabla$  を演算すれば,

$$\mathbf{f} = 2 \oint_S dS' \{(\nabla' \psi) \times (\mathbf{f}' \times \mathbf{t}_Z') + (\nabla' \psi)(\mathbf{f}' \cdot \mathbf{t}_Z')\}. \quad (22)$$

流体領域/真空領域 (+/-) の調和場を  $\mathbf{f}_\pm$  と区別した上で,  $\mathbf{f}_\pm$  から基本場  $\mathbf{f}_\pm^0$  を除いた誘導場を  $\mathbf{f}_\pm^1$  と表す. もし  $\mathbf{f}_\pm^1$  が調和場であれば, 界面で (22) を満たす. また, 流体領域から真空領域を向く法線単位ベクトルを  $\mathbf{t}_Z$  とすれば, 界面に対する  $\mathbf{f}_\pm^1$  の各成分は, 接線磁場の誘導場  $h_{X,Y}^1$ , 法線磁束密度

の誘導場  $b_Z^1$  により, 次のように表される.

$$t_Z \cdot f_{\pm}^1 = b_Z^1 \mp \mu_{\pm} M b_Z^0, \quad t_{X,Y} \cdot f_{\pm}^1 = \mu_{\pm} h_{X,Y}^1. \quad (23)$$

(18)にある  $\hat{G}$  の定義 (積分範囲は  $F$  として無限遠からの寄与は落とす) と恒等変形  $f_{\pm}^1 = t_Z \times (f_{\pm}^1 \times t_Z) + t_Z (f_{\pm}^1 \cdot t_Z)$  で流体領域・真空領域ごとの (22) を表してから, (23) を用いれば,

$$(t_Z \mp \hat{G}) \left\{ \times (h_X^1 t_Y - h_Y^1 t_X) - b_Z^1 / \mu_{\pm} \right\} = \mp (t_Z \mp \hat{G}) M b_Z^0 \quad (24)$$

が導かれる. 両領域の (24) について和をとってから  $t_Z, t_{X,Y}$  との内積を求めれば, 3次元界面磁場方程式 (17) が導かれる.

## 6 有限厚さ領域における汎用界面磁場解析

本節では, 3次元界面磁場方程式を前節より簡明に導き, 合わせて流体領域・真空領域が有限な厚さを持つ場合へ拡張する.

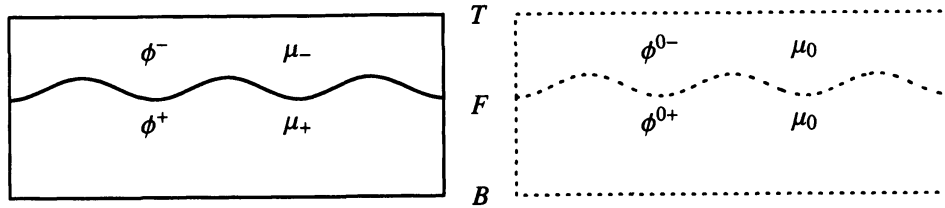


Fig. 2: 流体 (+)・真空 (-) 各領域の磁気ポテンシャル  $\phi^{\pm}$  (左) とそれらの基本場  $\phi^{0\pm}$  (右).  
 $T$ : 上方境界,  $B$ : 下方境界,  $F$ : 界面.

流体 (+)・真空 (-) 各領域の磁気ポテンシャルを  $\phi^{\pm}$  とし, 両領域の界面が存在する前に与える基本場を  $\phi^{0\pm}$  とする (Fig. 2).  $\phi^{\pm}$  と共に  $\phi^{0\pm}$  も 3次元 Laplace 方程式  $\Delta' \phi^{0\pm} = 0$  を満たすとして,  $\phi^{\pm}$  から  $\phi^{0\pm}$  の寄与を差し引いておくと, Green の定理 (21) から, 流体・真空各領域の磁気ポテンシャルに対する次の関係が導かれる.

$$\begin{cases} \phi^- - \phi^{0-} = 2 \iint_{F+T} dS'^- \cdot \{ (\phi'^- - \phi^{0-}') (\nabla' \psi) - \psi (\nabla' \phi'^- - \nabla' \phi^{0-}') \}, \\ \phi^+ - \phi^{0+} = 2 \iint_{F+B} dS'^+ \cdot \{ (\phi'^+ - \phi^{0+}') (\nabla' \psi) - \psi (\nabla' \phi'^+ - \nabla' \phi^{0+}') \}. \end{cases} \quad (25)$$

ここで,  $T, B, F$  はそれぞれ, 上方境界・下方境界・界面を示す.

(25) を両領域について加え合わせると, 界面  $F$  上では面積素が



$dS^{+'} = -dS^{-'} = dS' = dS't'_Z$  と互いに逆向きになることから、右辺では被積分量が差し引きとなり、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} & \phi^+ - \phi^{0+} + \phi^- - \phi^{0-} \\ &= 2 \iint_F dS' \cdot \left\{ (\phi^{+'} - \phi^{0+'} - \phi^{-'} + \phi^{0-'})(\nabla'\psi) \right. \\ & \quad \left. - \psi(\nabla'\phi^{+'} - \nabla'\phi^{0+'} - \nabla'\phi^{-'} + \nabla'\phi^{0-'}) \right\} + T + B \\ &= 2 \iint_F dS' \cdot (\Phi' \nabla' \psi - \psi \nabla' \Phi') + T + B. \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、以下の量を定義した。

$$\Phi \equiv \phi^+ - \phi^{0+} - \phi^- + \phi^{0-}, \quad (27)$$

$$T \equiv 2 \iint_T dS'^- \cdot \{ (\phi^{-'} - \phi^{0-'})(\nabla'\psi) - \psi(\nabla'\phi^{-'} - \nabla'\phi^{0-'}) \}, \quad (28)$$

$$B \equiv 2 \iint_B dS'^+ \cdot \{ (\phi^{+'} - \phi^{0+'})(\nabla'\psi) - \psi(\nabla'\phi^{+'} - \nabla'\phi^{0+'}) \}. \quad (29)$$

次に、(26) の両辺に観測点に関する勾配を演算する。このとき、 $\nabla\psi = -\nabla'\psi$ ,  $\nabla \times (\nabla'\psi) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{a}$  が定ベクトルなら  $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b})$  となることを用いて、右辺第1項の被積分量を

$$\begin{aligned} & \nabla(\Phi' dS' \cdot \nabla' \psi - \psi dS' \cdot \nabla' \Phi') \\ &= \Phi' \{ (dS' \cdot \nabla)(\nabla' \psi) + dS' \times \nabla \times (\nabla' \psi) \} - (\nabla \psi) dS' \cdot \nabla' \Phi' \\ &= (\nabla' \psi) dS' \cdot \nabla' \Phi' - \Phi' (dS' \cdot \nabla')(\nabla' \psi) \end{aligned} \quad (30)$$

と書き換えれば、

$$\begin{aligned} & \nabla(\phi^+ - \phi^{0+}) + \nabla(\phi^- - \phi^{0-}) \\ &= 2 \iint_F (\nabla' \psi) dS' \cdot \nabla' \Phi' - 2 \iint_F \Phi' (dS' \cdot \nabla')(\nabla' \psi) + \nabla(T + B). \end{aligned} \quad (31)$$

ここで、次の接線界面条件(32)と法線界面条件(33)を適用する。

$$\phi^+ = \phi^- \equiv \phi, \quad (32)$$

$$b_Z^+ = -b_Z^- \equiv b_Z. \quad (33)$$

ただし、基本場に対しては、界面がないため、次のようになる。

$$\phi^{0+} = \phi^{0-} = \phi^0, \quad \nabla \phi^{0+} = \nabla \phi^{0-} = \nabla \phi^0. \quad (34)$$

$\mathbf{f}_\pm$  から基本場  $\mathbf{f}_\pm^0$  を除いた誘導場を  $\mathbf{f}_\pm^1$  と表せば、(31)の左辺は、 $\nabla(\phi^\pm - \phi^{0\pm}) = (\mathbf{f}_\pm - \mathbf{f}_\pm^0)/\mu_\pm = \mathbf{f}_\pm^1/\mu_\pm$  となる。 $\mathbf{f}_\pm^1$  の界面に対する各成分は、接線磁場の誘導場  $h_{X,Y}^1$ , 法線磁束密度の誘導場  $b_Z^1$  により、次のように表されるこ

とは(23)で述べた.

$$t_Z \cdot f_{\pm}^1 = b_Z^1 \mp \mu_{\pm} M b_Z^0, \quad t_{X,Y} \cdot f_{\pm}^1 = \mu_{\pm} h_{X,Y}^1. \quad (35)$$

したがって, (31)左辺の界面成分は,  $P \equiv (1/\mu_- + 1/\mu_+)/2$  により, 以下のよう  
に表される.

$$\begin{cases} t_Z \cdot \left( f_+^1/\mu_+ + f_-^1/\mu_- \right) = 2P b_Z^1, \\ t_{X,Y} \cdot \left( f_+^1/\mu_+ + f_-^1/\mu_- \right) = 2h_{X,Y}^1. \end{cases} \quad (36)$$

右辺第1項は, (18)の  $\hat{G}$  を用いて次のように書き換えられる.

$$2 \iint_F (\nabla' \psi) dS' (t_Z' \cdot \nabla' \Phi) = \hat{G} [t_Z \cdot \nabla \Phi]. \quad (37)$$

さらに, 法線界面条件(33)を法線磁束密度  $b_Z^+ = \mu_+ t_Z^+ \cdot \nabla \phi^+$ ,  $b_Z^- = \mu_- t_Z^- \cdot \nabla \phi^-$   
および法線単位ベクトル  $t_Z \equiv \pm t_Z^{\pm}$  で表せば,  $t_Z \cdot \nabla \phi^+ = b_Z/\mu_+$ ,  $t_Z \cdot \nabla \phi^- =$   
 $b_Z/\mu_-$  となるが, (34)の適用後, この関係と  $M \equiv (1/\mu_- - 1/\mu_+)/2$  を用いれば,

$$\begin{aligned} t_Z \cdot \nabla \Phi &= t_Z \cdot \nabla (\phi^+ - \phi^{0+}) - t_Z \cdot \nabla (\phi^- - \phi^{0-}) = t_Z \cdot \nabla \phi^+ - t_Z \cdot \nabla \phi^- \\ &= (1/\mu_+ - 1/\mu_-) b_Z = -2M b_Z = -2M(b_Z^0 + b_Z^1). \end{aligned} \quad (38)$$

また界面上では, (32),(34)より  $\Phi \equiv \phi^+ - \phi^{0+} - \phi^- + \phi^{0-} = 0$  となり, (31)の右  
辺第2項は0となる. 以上により, (31)の各方向成分は次のようになる.

$$\begin{cases} 2P b_Z^1 = t_Z \cdot \left\{ \hat{G} [-2M(b_Z^0 + b_Z^1)] + \nabla(T+B) \right\}, \\ 2h_{X,Y}^1 = t_{X,Y} \cdot \left\{ \hat{G} [-2M(b_Z^0 + b_Z^1)] + \nabla(T+B) \right\}. \end{cases} \quad (39)$$

ここで,  $\nabla(T+B) \equiv 2g$ ,  $t_I \cdot \hat{G} \equiv \hat{G}_I$  ( $I=X, Y, Z$ ) と置き, 誘導場を含む項を左  
辺に集めると,

$$\begin{cases} (P + M \hat{G}_Z) b_Z^1 = -M \hat{G}_Z b_Z^0 + t_Z \cdot g, \\ h_{X,Y}^1 + M \hat{G}_{X,Y} b_Z^1 = -M \hat{G}_{X,Y} b_Z^0 + t_{X,Y} \cdot g. \end{cases} \quad (40)$$

(40)は有限厚さ領域における3次元界面磁場方程式である. (17)と較べ  
ると, ベクトル  $g$  と  $t_Z, t_{X,Y}$  の内積の項が右辺に加わっている.  $g$  は上方境界・  
下方境界が界面に及ぼす影響を表し, 求められる誘導場は  $g$  の各方向成分  
に依存する. ここで  $g$  は, 次のようになる.

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{2} \nabla(T+B) \\ &= \nabla \iint_T dS' \cdot \left\{ \phi^{1-'} (\nabla' \psi) - \psi (\nabla' \phi^{1-'}) \right\} + \nabla \iint_B dS' \cdot \left\{ \phi^{1+'} (\nabla' \psi) - \psi (\nabla' \phi^{1+'}) \right\} \\ &= \iint_T \left\{ (\nabla' \psi) dS' \cdot \nabla' \phi^{1-'} - \phi^{1-'} (dS' \cdot \nabla') (\nabla' \psi) \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

$$+ \iint_B \{ (\nabla' \psi) d\mathbf{S}' \cdot \nabla' \phi^{1+} - \phi^{1+} (d\mathbf{S}' \cdot \nabla') (\nabla' \psi) \} \quad (42)$$

$$= \iint_T d\mathbf{S}' \left\{ (\nabla' \psi) \frac{\partial \phi^{1-}}{\partial Z'} - \phi^{1-} \frac{\partial (\nabla' \psi)}{\partial Z'} \right\} \\ + \iint_B d\mathbf{S}' \left\{ (\nabla' \psi) \frac{\partial \phi^{1+}}{\partial Z'} - \phi^{1+} \frac{\partial (\nabla' \psi)}{\partial Z'} \right\}. \quad (43)$$

(41)では、誘導場の磁気ポテンシャルを  $\phi^{1\pm} \equiv \phi^{\pm} - \phi^{0\pm}$  と置いた。また、(42)の変形は(30)に習い、(43)は  $d\mathbf{S}' \cdot \nabla' = d\mathbf{S}' \cdot \mathbf{t}'_Z \cdot \nabla' = d\mathbf{S}' \partial / \partial Z'$  で書き換えた ( $Z'$  は各境界の外向きが正)。具体的に  $\mathbf{g}$  を決めるには、磁極の配置などに応じて  $\phi^{1\pm}$ ,  $\partial \phi^{1\pm} / \partial Z'$  を与えなければならない。

## 7 まとめと今後の課題

界面変形の大きさや複雑さによる制限を受けることなく磁性流体の界面現象を調べるために、これまで汎用的な流体解析・磁場解析を構築してきた。本稿では、これらの解析の導出過程を振り返りながら、流体解析に用いる界面力学方程式と磁場解析に用いる3次元界面磁場方程式について、流体領域・真空領域の厚さが有限な場合へ適用するために必要な拡張を行い、さらに予備的な考察を行った。

界面力学方程式(6)はこれまで主に、ある有限な  $\tilde{\zeta}^0$  のまわりで線形化して、界面の安定性を調べるために利用してきたが、界面力学方程式はそれにとどまらず、もっと広く磁性流体界面における動的現象の解析に用いることができる。本研究では現在、(6),(12)に基づいて、 $\tilde{\zeta}^1$  の時間発展を追いつつ、水平に近い界面上を伝播する波動の振る舞いを調べている。

## 参考文献

- [1] 水田 洋: 磁性流体界面における磁場解析と安定性解析; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理と応用」, **1701**, p.139 (2010).
- [2] 水田 洋: 磁性流体界面形状解析における非線形応答; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の多様性と普遍性」, **1761**, p.163 (2011).
- [3] Y.Mizuta: Stability analysis on the free surface phenomena of a magnetic

- fluid for general use; *J. Magn. Magn. Mater.*, **323**(10), p.1354 (2011).
- [4] 水田 洋: 複雑界面における調和場解析の次元間対応; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理と応用」, **1483**, p.175 (2006).
  - [5] 水田 洋: 磁性流体自由表面解析への3次元 Hilbert 変換の適用; 日本流体力学会年会 2006 講演要旨集 (<http://www.nagare.or.jp/nenkai2006/ronbun.html>), AM06-16-003 (2006).
  - [6] Y.Mizuta: Interface magnetic field analysis for free surface phenomena of magnetic fluid; *Magnetohydrodynamics*, **44**(2), p.155 (2008).
  - [7] 水田 洋: 磁性流体表面波動における界面磁場解析; 日本流体力学会年会 2012 講演論文集, 16-01-04-05 (2012).
  - [8] A.Gailitis: Formation of the hexagonal pattern on the surface of a ferromagnetic fluid in an applied magnetic field; *J. Fluid Mech.*, **82**(3), p.401 (1977).
  - [9] 水田 洋: 磁性流体界面解析における行列解法; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の研究の新たな進展」, **1800**, p.203 (2012).
  - [10] 水田 洋: 磁性流体3次元定常自由表面形状の決定過程; 日本流体力学会年会 2008 拡張要旨集 (<http://www.nagare.or.jp/nenkai2008/cd-rom/index.html>) (2008).
  - [11] R.E.Rosensweig: *Ferrohydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge), Chap.7 (1985).